3 Bladen $0.3 + 0.6 + 0.6 = 1.5$

1 a $x^2 - 26x + 1 = 0$

0.3

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{672}}{2}$$

$$= 13 \pm 2\sqrt{42}$$

$$x_1 = 13 + 2\sqrt{42} \approx 25{,}9614801$$

$$x_2 = 13 - 2\sqrt{42} \approx 0{,}038518603$$

b $26^2 = 676{,}00$

$676{,}00 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 672{,}00$

$\sqrt{672{,}00} = 25{,}923$

$26 + 25{,}923 = 51{,}923$ $\qquad$ $26 - 25{,}923 = 0{,}077000$

$\frac{51{,}923}{2 \cdot 1} = 25{,}962$ $\qquad$ $\frac{0{,}077000}{2 \cdot 1} = 0{,}038500$

0.6

$x_1 \approx 25{,}962$

$x_2 \approx 0{,}038500$

Het antwoord is redelijk accuraat, i.e. in 3 significante cijfers nog nauwkeurig. In 5 significante cijfers verschillen de antwoorden van de werkelijke waardes, met name x_2 is minder accuraat.

c Als een van de benaderde nulpunten niet nauwkeurig is, en dus de andere wel. Dan de 2e oplossing uit de 1e, nauwkeurige oplossing worden berekend.

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$ $\qquad$ $ax^2 + bx + c = 0$

$x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 x_2 = 0$

0.6

$ax^2 + a(-x_1 - x_2)x + a x_1 x_2 = 0 \Rightarrow a(-x_1 - x_2) = b$

en $a x_1 x_2 = c$

x_2 kan dus op twee manieren uit x_1 berekend worden bijvoorbeeld $x_2 = \frac{c}{a x_1}$

En dit levert een nauwkeuriger resultaat dan $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$0,4 + 0.6 + 0.8 = 1.8$

2a $$-10^{-4}x + y = 1$$
$$x + y = 2$$

0.4

$$(-10^{-4}-1)x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+10^{-4}} \approx 1$$

$$y = 2 - x = 2 - \frac{1}{1+10^{-4}} = \frac{2+2\cdot10^{-4}-1}{1+10^{-4}} = \frac{1+2\cdot10^{-4}}{1+10^{-4}} \approx 1$$

b* Het stelsel herschreven in matrixvorm:

0.6

$$\begin{bmatrix} -10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1{,}00 & 1{,}00 \\ 1{,}00 & 1{,}00 & 2{,}00 \end{array}\right] \xrightarrow[10000\,I]{II \to II +} \left[\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1{,}00 & 1{,}00 \\ 0{,}00 & 100\cdot10^{2} & 100\cdot10^{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{10000}\,II]{I \to I +} \left[\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 100\cdot10^{2} & 100\cdot10^{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{100\cdot10^{2}}{100\cdot10^{2}} = 1{,}00 \quad , \quad x = \frac{0}{-10^{-4}} = 0{,}00$$

c* Het stelsel uit b partieel pivoteren:

0.8

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1{,}00 & 1{,}00 & 2{,}00 \\ -10^{-4} & 1{,}00 & 1{,}00 \end{array}\right] \xrightarrow[10^{-4}\,I]{II \to II +} \left[\begin{array}{cc|c} 1{,}00 & 1{,}00 & 2{,}00 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \end{array}\right] \xrightarrow{I \to I - II} \left[\begin{array}{cc|c} 1{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 1{,}00 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1{,}00}{1{,}00} = 1{,}00 \quad , \quad x = \frac{1{,}00}{1{,}00} = 1{,}00$$

* -10^{-4} moet $-1{,}00\cdot10^{-4}$ zijn bij opgave a en b

Derk Rouwhorst
S2173398

3a a Newton-Raphson $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, gaat fout als de helling $f'(x_k)$ nul is of ∞ is. 1 initiële conditie
0,2 nodig x_0 en $f(x_0)$

b ~~Secant~~ Bisectie methode probleem als $f(x_k) = f(x_{k-1})$ zal in dit
0,2 geval niet gebeuren 2 initiële condities vereist voor interval $[a,b]$ $a < x^* < b$

c Newton-Raphson gaat fout als $f'(x_k) = 0$ maar in (c) zijn het rechte lijnen als $0,1 < x_0 < 0,5$ dan in 1 iteraties het
0 antwoord 1 initiële conditie x_0

d Secant methode $x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$
0 probleem als $f(x_k) = f(x_{k-1})$ dan is er geen oplossing 2 initiële condities nodig x_0 en x_1 en $f(x_0)$ en $f(x_1)$ en $x_0 \neq x_1$

b $f(x) = x^2 + x - 1$ met bisectie methode
0.4

aantal benodigde iteratie voor een benaderingsfout kleiner dan ε, met begin interval $[a,b]$:

$$n = {}^2\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

0,6
$a = 0,\ b = 1,\ \varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow n = {}^2\log\left(\frac{1-0}{10^{-3}}\right) = {}^2\log 1000 \approx 9,966$

afronden naar boven geeft $n = 10$ iteraties

c $f(x) = x^2 + x - 1$ met Newton-Raphson methode met $x_0 = 0,5$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad f(x) = x^2 + x - 1 \quad f'(x) = 2x + 1$$

0,6
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,5 - \frac{0,5^2 + 0,5 - 1}{2 \cdot 0,5 + 1} = 0,625$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,625 - \frac{0,625^2 + 0,625 - 1}{2 \cdot 0,625 + 1} = 0,618055\overline{55}$$

d $f(x) = \sin(x - 0{,}5) - x + 0{,}5$

x^* is een m-voudig nulpunt van f als
$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$ en $f^{(m)}(x^*) \neq 0$

$f(x) = 0$ heeft als unieke oplossing $x^* = 0{,}5$,
want $\sin(x - 0{,}5) = x - 0{,}5 \iff x = 0{,}5$

$f(x^*) = \sin(0{,}5 - 0{,}5) - 0{,}5 + 0{,}5 = 0$
$f'(x^*) = \cos(0{,}5 - 0{,}5) - 1 = 0$
$f''(x^*) = -\sin(0{,}5 - 0{,}5) = 0$
$f'''(x^*) = -\cos(0{,}5 - 0{,}5) = -1 \neq 0$

0.3

Dus $x^* = 0{,}5$ is een 3-voudig nulpunt $m = 3$.

4 a $\frac{dv}{dt} = -g + C\frac{\rho A v^2}{m}$

$g = 9{,}82\ ms^{-2}$, $\rho = 1{,}271\ kg\ m^{-3}$, $C = 0{,}4$, $A = 25\ m^2$, $m = 80\ kg$

Voor de voorwaartse Euler methode geldt:

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_n, t_n) \quad \text{met} \quad h = t_{n+1} - t_n, \quad f(y_n, t_n) = \frac{dy}{dt}$$

$$v_{n+1} = v_n + (t_{n+1} - t_n) f(v_n, t_n) = v_n + (t_{n+1} - t_n)\left(-g + C\frac{\rho A v_n^2}{m}\right)$$

$$= v_n + (t_{n+1} - t_n)(-9{,}82 + 0{,}4 \cdot 1{,}271 \cdot 25 / 80 \cdot v_n^2)$$
$$= v_n + (t_{n+1} - t_n)\left(\frac{1271}{8000} v_n^2 - 9{,}82\right)$$

0.4

Voor de achterwaartse Euler methode geldt:

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_{n+1}, t_{n+1}) \quad \text{met} \quad h = t_{n+1} - t_n , \ f(y_{n+1}, t_{n+1}) = \frac{dy}{dt}$$

$$v_{n+1} = v_n + (t_{n+1} - t_n) f(v_{n+1}, t_{n+1}) = v_n + (t_{n+1} - t_n)\left(-g + C \frac{\rho A v_{n+1}^2}{m}\right)$$

$$= v_n + (t_{n+1} - t_n)(-9{,}82 + 0{,}4 \cdot 1{,}271 \cdot 25/80 \cdot v_{n+1}^2)$$

0.6 $$= v_n + (t_{n+1} - t_n)\left(\frac{1271}{8000} v_{n+1}^2 - 9{,}82\right)$$

c Ze zijn beide impliciet, want het zijn geen functies die in dit geval, van de tijd alleen afhangen. In beide functies/methodes wordt gebruik gemaakt van de voorgaande waarde van v, v_n. 0.2

d Het aantal keer dat je een berekening moet uitvoeren is: $\frac{t_e - t_0}{h}$
De asymtotische daalsnelheid schaalt met h. voor nauwkeurige antwoorden op lange termijn moet h klein zijn. De methode is absoluut stabiel
0 als $h > 0$, $|y_{n+1}| < y_n|$ en de rij y_n convergeert naar 0.

5 a $P_0 = 1 \quad P_1 = x \quad P_k = ((2k-1)x P_{k-1} - (k-1) P_{k-2})/k$

$P_0 = 1$ $\qquad c = [1]^T$

$P_1 = x$ $\qquad c = [0 \ 1]^T$

$P_2 = \frac{(2\cdot 2-1)x \cdot x - (2-1)\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $\qquad c = [-\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{3}{2}]^T$

$P_3 = \frac{(2\cdot 3-1)x \cdot (3/2x^2 - 1/2) - (3-1)\cdot x}{3} = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ $\qquad c = [0 \ -\frac{3}{2} \ 0 \ \frac{5}{2}]^T$

$P_4 = \cdots = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$ $\qquad c = [\frac{3}{8} \ 0 \ -\frac{15}{4} \ 0 \ \frac{35}{8}]^T$

0,4+0.4=0.8

0,4

```
function c = recursive_legendre ( k )
% c = recursive_legendre ( k )
% computes the coefficients of the k-th Legendre polynomial
%
% INPUT: k is the degree of the Legendre polynomial
% OUTPUT: c is the vector containing the coefficients of P_k
```

how do you define x and f(x) ?

P_0 = ~~f(x)~~ 1

P_1 = ~~f(x)~~ x

This function returns a vector

not a mathematical function

P_k = ((2*k-1)* f(x) x * recursive_legendre (k-1)
      -(k-1)* recursive_legendre (k-2))/k

This is again a vector

c = coefficients (P_k)

End

De functie coefficients maakt een vector aan met de coefficienten van de polynoom.

Bijvoorbeeld coefficients ($a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$) = $[a,b,c,d,e]^T$

```
function c = nonrecursive_legendre (k)
% c = legendre (k)
% Computes the coefficients of the k-th Legendre polynomial
%
% INPUT: k is the degree of the Legendre polynomial
% OUTPUT: c is the vector containing the coefficients of P_k

C_0= [1]
C_1= [0; 1]
n=0
For n=2:k
    p(n)= ((2*n-1)*f(x) x * p(n-1) -(k-1)*p(n-2))/n
    C_n = coefficients (p(n))
End
```

Define p(n). Are they vectors or functions?

$$\begin{cases} p(0) = f(x)\ 1 \\ p(1) = f(x)\ x \end{cases}$$

: what ~~this expression means~~ ?

```
C= C_k

End
```